



.....  
Rodrigo Rodrigues Machado<sup>1,2,#</sup> , Alexandre Carlos Tort<sup>2,3</sup>, Carlos Augusto Domingues Zarro<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

<sup>2</sup>Programa de Pós-Graduação em Ensino e História da Matemática e da Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

<sup>3</sup>Mestrado Profissional em Ensino de Física, Instituto de Física Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.  
.....

### Palavras-chave

gravitação newtoniana  
relatividade geral  
avanço do periélio dos planetas

### Resumo

Este trabalho descreve o problema do avanço do periélio de Mercúrio e sua solução no contexto da teoria da relatividade geral (TRG). Com isto, pretende-se contextualizar o problema de tal modo que possa vir a ser útil como leitura complementar ou auxiliar a professores do Ensino Médio, universitários e, eventualmente, alunos que tenham interesse em conhecer essa fascinante teoria da física.

### 1. Descartes, Newton, Laplace e Le Verrier

O triunfo da visão newtoniana do mundo pode ser sumarizado no trecho do poema de Voltaire (François-Marie Arouet, 1694-1778) na Carta LI, 1736, citada na Ref. [1]:

Deus fala e o caos se dissipa à sua voz:

Para um centro comum tudo gravita ao mesmo tempo.

Esse tão poderoso motor, alma da natureza,

Estava oculto na noite obscura;  
O compasso de Newton, medindo o universo,

Levantou enfim o grande véu e os céus se abriram...

Este pequeno trecho de Voltaire, talvez não tão conhecido quanto o epitáfio de Alexander Pope (1688-1744).<sup>1</sup> expressa a

admiração que o filósofo tinha pela obra de Newton (Fig. 1).

Em janeiro de 1684, Edmond Halley (1656-1742) (Fig. 1), depois de um encontro da Royal Society, em conversa com Robert Hooke (1635-1703) e Christopher Wren (1632-1723), ouviu de Hooke a alegação de que este resolvera o problema do movimento dos planetas conhecidos até então. Hooke afirmava que os planetas estavam submetidos a uma força proporcional ao inverso do quadrado da distância que os separava. Halley concluíra que a força que mantinha os planetas em suas órbitas dependia do inverso do quadrado da distância, mas não sabia como demonstrar este resultado [2]. Apesar da insistência de Halley e Wren, e um prêmio em dinheiro oferecido por este último, Hooke mostrou-se incapaz de apresentar a solução.

# Autor de correspondência. E-mail: [rodrigo.machado@cefet-rj.br](mailto:rodrigo.machado@cefet-rj.br)

Este é um artigo de acesso livre sob licença Creative Commons



<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/>

Copyright © 2023, Copyright by Sociedade Brasileira de Física. Printed in Brazil.

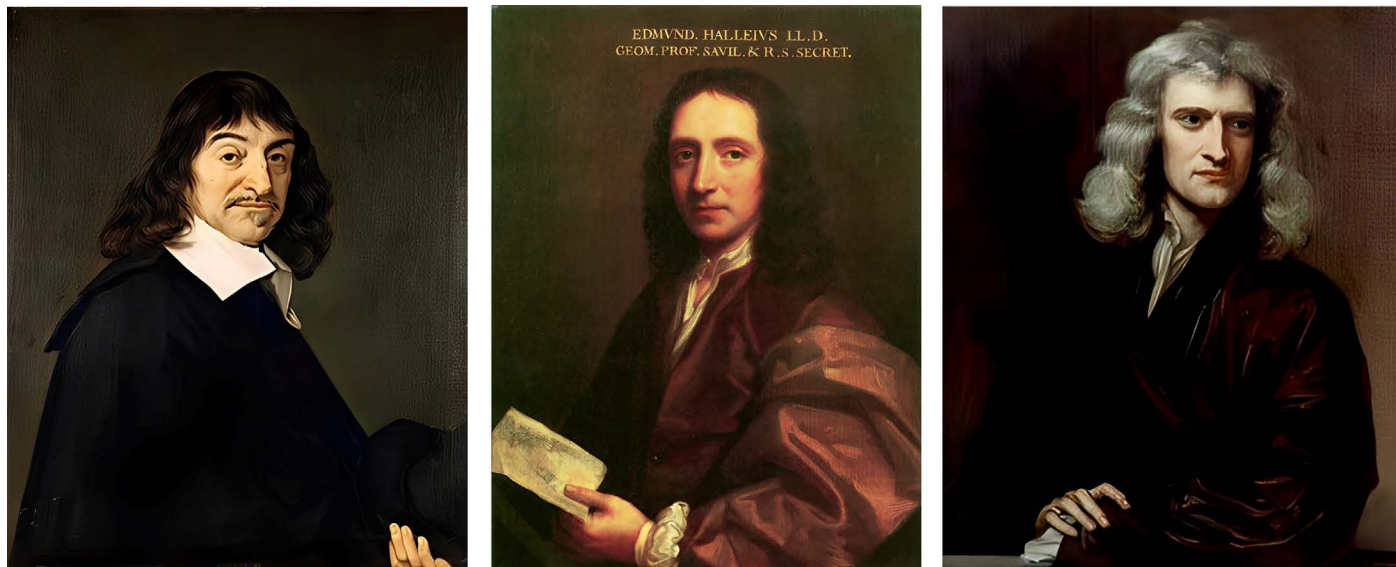


Figura 1 - Da esquerda para a direita: René Descartes (1596-1650), por Franz Hals, Edmund Halley (1656-1742) e Isaac Newton (1643-1727) aos 46 anos retratado por Godfrey Kneller (1646-1723) (Imagens Wikipedia).

Em agosto de 1684, Halley fez uma visita a Newton em Cambridge [2] e perguntou-lhe que tipo de curva um planeta descreveria, se a força entre este e o Sol fosse proporcional ao inverso do quadrado da distância entre os mesmos. Newton sabia a resposta: “Uma elipse!”, teria dito.<sup>2</sup> É possível que Newton tenha resolvido o problema entre 1679-680 [3]. Hoje, os textos modernos de mecânica referem-se à pergunta original de Halley como o problema dos dois corpos sob ação de uma força central, e no caso particular em que a força central segue a lei do inverso do quadrado, como é o caso da lei da gravitação universal, assim como o problema de Kepler.

Convém que antes de descrever o problema do avanço do periélio de Mercúrio, façamos uma breve reconstrução histórica sobre as duas teorias do movimento planetário mais importantes da época: a de Newton (ação a distância) e a de René Descartes, a teoria dos vórtices (forças de contato).

### 1.1. Descartes, Newton e os vórtices

De acordo com Descartes, o vácuo é uma impossibilidade filosófica, pois não há substância, não importa qual seja a sua natureza, que apresente uma distinção entre a extensão do espaço e a extensão do corpo, pois o corpo extenso caracterizado por comprimento, largura e profundidade por si mesmo garante a conclusão de que este é uma substância (um corpo material), já que seria uma contradição a existência de uma extensão que não pertencesse a nada. Esta concepção deve ser estendida ao vácuo, e logo, como este tem extensão, deve conter substância [4].

A teoria dos vórtices do movimento planetário decorre naturalmente da concepção cartesiana da impossibilidade do vácuo. No modelo de Descartes, os

planetas são carregados pelo vórtice gerado pela rotação do Sol em torno de seu próprio eixo, o vórtice principal. As luas planetárias são, por sua vez, carregadas por vórtices secundários gerados pelos planetas em torno dos quais elas orbitam. Veja a Fig. 2.

As críticas de Newton à teoria dos vórtices de Descartes sobre o movimento dos planetas do Sistema Solar são muitas, por exemplo, a sustentabilidade dos vórtices e a desconsideração das observações astronômicas, especialmente as relativas às leis de Kepler, em particular, a Lei Harmônica [4, 5]. Quanto ao primeiro ponto, Newton argumenta que os vórtices tendem a dissipar-se com o tempo e que para mantê-los é necessário fornecer-lhes energia. Quanto ao segundo, por volta de dezembro de 1684, Newton procurou a ajuda de John Flamsteed e recebeu deste uma carta em

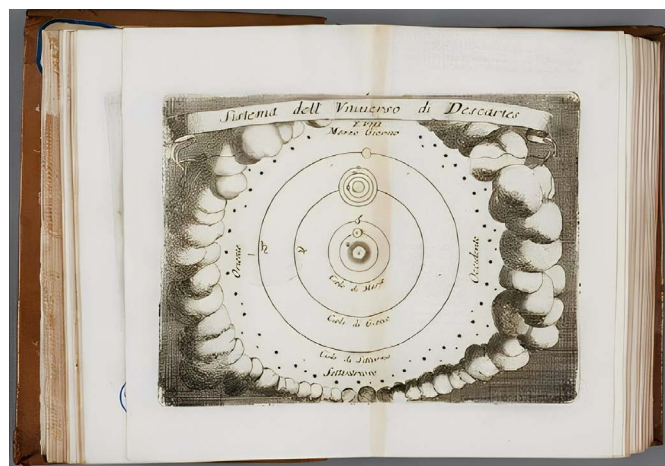


Figura 2 - Ilustração da concepção de Descartes do Sistema Solar em *Epitome da Cosmografia*. Vincenzo Maria Coronelli (1650-1718).

27 de dezembro, em que Flamsteed respondeu-lhe que o alongamento máximo das órbitas das luas de Júpiter estava em acordo com a Terceira de Kepler [4]. Newton cita Kepler no Livro 3 dos *Principia* após o enunciado do Fenômeno 4 [3]:

Os períodos dos cinco planetas primários (Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter e Saturno), e do Sol em torno da Terra ou da Terra em torno do Sol - em relação às estrelas fixas, estão na proporção 3/2 das suas distâncias médias ao Sol.<sup>4</sup>

Prossegue,

Esta proporção, descoberta por Kepler, é aceita por todos.

Isto é: se  $T$  é o período sideral e  $r$ , a distância média do planeta ao Sol:

$$T \propto r^{3/2}.$$

A objeção de Newton ao modelo de Descartes na questão da Terceira Lei de Kepler pode ser entendida da seguinte forma: em um movimento circular uniforme, o raio  $r$  e o módulo da velocidade tangencial  $v$  são constantes; logo, o produto  $v \times r$  é constante. Portanto,

$$vr = \text{constante}.$$

Por conseguinte,  $v \propto 1/r$ . Por outro lado, podemos escrever também para a velocidade tangencial de uma partícula do éter ou elemento em movimento circular uniforme:

$$v = \frac{2\pi r}{T}, \quad (1)$$

onde  $T$  é o período do elemento, isto é

$$T \propto \frac{r}{1/r} \propto r^2,$$

em desacordo com a Terceira Lei de Kepler.

É no Livro 3 dos *Principia* que Newton estabelece a lei do inverso do quadrado da distância, a partir do método sugerido por Hooke em uma carta a Newton, datada de 24 de novembro de 1679, de decompor o movimento em uma componente tangencial e outra radial [4].

### 1.2. A gravitação universal e sua penetração no continente europeu

Coube a Pierre Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759) a introdução da gravitação universal no continente europeu, Ref. [6]. Foi seguido por Leonard Euler (1707-1783), Alexis Claude Clairaut (1713-1765) e Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) [6]. E quais foram os motivos da admiração de Voltaire e dos newtonianos franceses pela obra de Newton? Eis uma lista parcial:

- (a) a determinação da órbita do Grande Cometa de 1680, descoberto por Gottfried Kirch (1639-1710). Com os dados disponíveis, Newton mostrou que a órbita do cometa obedecia à lei do inverso do quadrado e era parabólica;
- (b) a teoria das marés. Newton mostrou que a atração gravitacional da Lua e do Sol era a causa das marés;
- (c) a forma da Terra. Os cartesianos defendiam a ideia de que a Terra era prolata, isto é, um esferoide para o qual o eixo polar é maior do que o eixo equatorial. Já os newtonianos afirmavam que a forma da Terra era oblata, um esferoide achatado nos polos. A expedição de Pierre-Louis Moreau Maupertuis (1698-1759) de 1732 decidiu a questão em favor de Newton, e valeu-lhe um comentário ferino de Voltaire. Uma segunda expedição, desta vez ao Vice-Reinado do Peru, de Bouguer-La Condomine, uma aventura épica que durou 10 anos, confirmou o resultado [7].

Voltaire foi um dos grandes incentivadores do newtonianismo na França e não economizou elogios à primeira tradução para o francês dos *Principia* por Gabrielle Emilie de Bréteuil, Marquesa du Châtelet (1706-1749) [8]. O livro é uma explanação dos princípios newtonianos e contou com a importante colaboração de Alexis Claude Clairaut [6]. Para mais informações sobre a Marquesa du Châtelet, ver Ref. [9]. O que os newtonianos franceses fizeram com a mecânica de Newton no que diz respeito aos corpos celestes é fascinante. São muitos os personagens envolvidos, e alguns já foram até mencionados. Mas daremos um salto no tempo e voltaremos nossa atenção para os dois newtonianos franceses mais importantes no contexto do problema do avanço do periélio de Mercúrio: Laplace e Le Verrier.

### 1.3. Laplace

O planeta Urano, observado pela primeira vez em 13 de março de 1781 [10] pelo astrônomo nascido em Hanover, Friederich Wilhelm Herschel (1738-1822), mas que ainda jovem mudara-se para a Inglaterra, onde adotou o prenome William, ofereceu chance à comunidade dos astrônomos de testar, desta vez com um objeto previamente desconhecido, a lei da gravitação universal. Pierre Simon de Laplace (1749-1827) (Fig. 3), o grande físico-matemático do século XVIII-XIX, mostrou que a órbita observada de Urano estava em perfeito acordo, dentro das limitações observacionais da época, com as previsões newtonianas.

Laplace também resolveu outro problema que assombrava a comunidade astronômica da época. De acordo com as observações, Júpiter estava movendo-se mais rápido do que as observações anteriores do final do século XVII mostravam. Enquanto isto, Saturno parecia estar movendo-se mais lentamente. Estas obser-

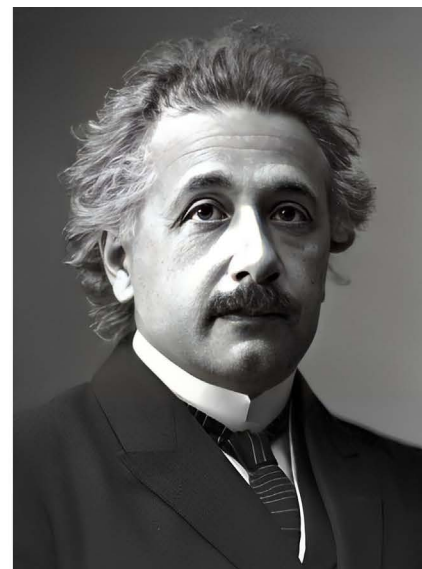


Figura 3 - Da esquerda para a direita: Pierre Simon Laplace (1749-1827), Urbain Jean Joseph Le Verrier (1811-1877) e Albert Einstein (1879-1955). (Imagens Wikipedia).

vações contradiziam frontalmente as previsões da mecânica celeste. Laplace, mantendo-se fiel à gravitação universal, mas introduzindo novos métodos matemáticos de abordar o problema e trabalhando arduamente entre 1785 e 1788, resolve o dilema e mostra que as observações Júpiter/Saturno estavam de acordo com Newton! A obra maior de Laplace, *A exposição do sistema do mundo* [11], é um testemunho eloquente da sua convicção no sistema de mundo newtoniano.

#### 1.4. Le Verrier e Netuno

O próximo grande consolidador da visão newtoniana do mundo seria outro francês, Urbain Le Verrier (Fig. 3). As contribuições de Le Verrier à ciência e à astronomia são muitas, mas a principal, sem nenhuma dúvida, é a descoberta de Netuno. O problema a ser resolvido era o das irregularidades da órbita de Urano em relação à órbita prevista. Le Verrier atribui essas irregularidades à existência de um novo planeta, calcula sua massa e o tamanho angular do seu disco. E, mais importante: sua posição! A pedido de Le Verrier, o astrônomo alemão Johann G. Galle (1812-1910) e seu assistente Heinrich L. D'Arrest (1822-1875), na madrugada de 3 de setembro de 1846, apontam o telescópio do Real Observatório de Berlim para a posição prevista pelo francês [10]. E ei-lo! O disco de 3,2 segundos de arco previsto por Le Verrier. O astrônomo irlandês John Couch Adams (1819-1892) poderia ter tido a primazia da descoberta, mas contingências na forma de desencontros e mal-entendidos entre ele e o Astrônomo Real, George Airy (1801-1892) intervieram. O novo membro do Sistema Solar recebe, não sem disputas, o nome de Netuno. Le Verrier con-

**As contribuições de Le Verrier à ciência e à astronomia são muitas, mas a principal, sem nenhuma dúvida, é a descoberta de Netuno**

solida sua posição como o astrônomo mais importante de seu tempo [10].

#### 1.5. Em busca de Vulcano

Em 1854, Le Verrier assume a direção do Observatório de Paris, e depois de estabelecer firmemente sua autoridade política e científica, volta-se para a implementação de seu programa de pesquisa: completar a mecânica newtoniana do Sistema Solar. O programa passa por rever a distância entre o Sol e a Terra, isto é: a unidade astronômica, um valor vital para a correção das anomalias orbitais dos então oito planetas do Sistema Solar, principalmente as dos planetas internos, Mercúrio, Vênus, Terra e Marte. Le Verrier mostra que uma nova estimativa das massas de Marte e da Terra combinadas com o novo valor da distância Sol-Terra melhorava de modo significativo a concordância entre a teoria e as órbitas observadas de Vênus, Terra e Marte [12]. Mas Mercúrio, que sempre fora o calcanhar de Aquiles no que diz respeito às observações astronômicas, continuava a ser um problema. A discrepância era pequena (veja a Fig. 4), mas Le Verrier entendia muito bem o que ela significava. O eixo maior da órbita elíptica de Mercúrio em torno do Sol avançava aproximadamente 38 segundos de arco a cada 100 anos. Para Le Verrier, esta anomalia deveria ter explicação dentro do quadro newtoniano, afinal a descoberta de Netuno mostrara que a gravitação newtoniana, sem qualquer espaço para dúvidas, regia o Sistema Solar. Le Verrier propôs duas teorias para o movimento observado de Mercúrio. O modelo de 1843 continha falhas, mas, em 1859, de posse de observações de melhor qualidade, Le

Planeta	Contribuição ao avanço do periélio de Mercúrio
Vênus	280'', 6 /século
Terra	83'', 6 /século
Marte	2'', 6 /século
Júpiter	152'', 6 /século
Saturno	7'', 2 /século
Urano	0'', 1 /século
TOTAL	526'', 7 /século

Figura 4 - Contribuições ao avanço do periélio de Mercúrio devidas aos demais planetas do Sistema Solar, estimadas por Le Verrier, e medidas em segundos de arco por século. Os dados observacionais e os cálculos de Le Verrier em 1859 mostravam que faltavam 38,3"/século. Ref. [12].

Verrier foi capaz de identificar claramente o avanço do eixo apsidal da órbita de Mercúrio [12]. Para entender a proposta de Le Verrier, convém rever algumas definições básicas utilizadas pelos astrônomos.

### 1.6. A órbita de um planeta no espaço

A Fig. 5 mostra a órbita elíptica de um planeta e os parâmetros ou elementos orbitais mínimos que descrevem a sua órbita no espaço:  $a$ , o semieixo maior da elipse;  $e$ , a sua excentricidade;  $i$ , o ângulo que o plano que contém a elipse faz com o plano de referência;  $\omega$ , o argumento do pericentro, o ponto da órbita mais próximo ao foco (ocupado pelo Sol) da elipse;  $\Omega$ , a longitude do nó ascendente em relação à direção de referência.

O ângulo definido por

$$\bar{\omega} = \Omega + \omega, \quad (2)$$

é a longitude do pericentro, a posição angular do ponto mais próximo ao centro de atração. No caso do Sistema Solar, o Sol está em um dos focos da elipse, e o outro foco está vazio.

Para os astrônomos, tal descrição é o ponto de partida para o problema real, pois um planeta não está sujeito apenas à ação atrativa do Sol. Sua órbita é influenciada em maior ou menor grau pelos demais planetas. Estas influências alteram os parâmetros orbitais e tornam a órbita real complexa (e aberta). Há conjunto de técnicas que permitem descrever a órbita real de um planeta que levam em conta os efeitos perturbativos.

### 1.7. A proposta de Le Verrier

Le Verrier, que previra a existência de Netuno com base em cálculos newtonianos, propõe a existência de um planeta ou um conjunto de corpos menores em órbita interior à órbita de Mercúrio capaz de dar conta dos segundos de arco por século que faltavam para explicar o avanço observado do periélio de Mercúrio. Em 1859, Le Verrier consegue isolar a contribuição que faltava à precessão do periélio de Mercúrio e obtém o resultado [12]

**Le Verrier propõe a existência de um novo planeta para explicar o valor correto para a precessão do periélio de Mercúrio**

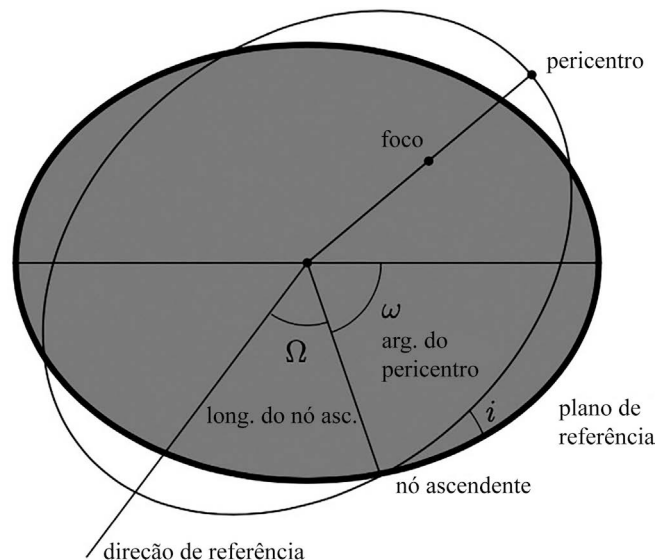


Figura 5 - A órbita no espaço: note que a longitude do nó ascendente e o argumento do pericentro não estão no mesmo plano.

$$2,72 \frac{de}{dt} + \frac{d\bar{\omega}}{dt} = 0,383''/\text{por ano} = 38,3''/\text{por século}, \quad (3)$$

onde  $\frac{de}{dt}$  é a taxa de variação temporal da excentricidade e  $\frac{d\bar{\omega}}{dt}$ , a taxa de variação temporal da longitude do pericentro. A taxa de variação temporal da excentricidade podia ser relacionada com a excentricidade da massa da matéria responsável pela perturbação adicional e seu movimento médio. Le Verrier supõe então que a excentricidade dessa matéria era nula ou desprezível, isto é:  $\frac{de}{dt} = 0$ , logo

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} = 38,3''/\text{por século}. \quad (4)$$

A hipótese de Le Verrier justifica-se pelos pequenos valores das excentricidades dos planetas conhecidos na época. A excentricidade de Mercúrio, que ainda hoje é a maior delas, vale 0,206 [13].

Supondo que houvesse um planeta a meia distância entre o Sol e Mercúrio, em órbita circular, Le Verrier estimou que sua massa deveria ser aproximadamente igual à massa deste último. Um planeta assim já deveria ter sido observado, pois as condições de observação seriam similares às de Mercúrio. Eis a razão da alternativa de Le Verrier, um cinturão de asteroides, ou de planetoides, em órbita intramercurial. De qualquer modo, a melhor chance de observar o suposto planeta, ou alguns membros do conjunto dos asteroides, seria durante um eclipse solar.

### 1.8. A observação de Lescarbault

Em 22 de dezembro de 1859, Le Verrier recebe uma carta de um médico do interior e astrônomo ama-

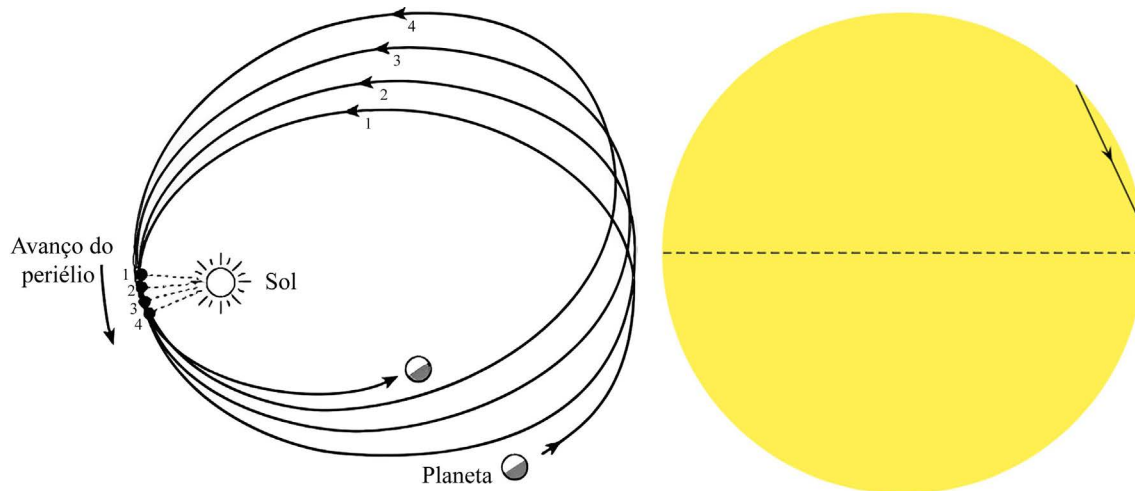


Figura 6 - Precessão do periélio de Mercúrio e o trânsito solar observado por Lescarbault. (Imagem à esquerda: Nasa's Cosmos). A imagem à direita (dos autores) é sugerida na Ref. [14].

dor, Edmond Modeste Lescarbault (1814-1894) [14]. Na carta, Lescarbault relata que em 26 de março de 1859 havia observado o trânsito solar do planeta postulado por Le Verrier (Fig. 6). Le Verrier faz uma visita ao bom doutor e, após um interrogatório minucioso, volta para Paris convencido de que seu planeta havia sido observado. Le Verrier anuncia a descoberta do novo planeta, Vulcano, em 2 de janeiro de 1860 e, utilizando o seu prestígio e influência política, faz com que Lescarbault receba a Legião de Honra do governo francês. A busca pelo planeta de Le Verrier ganha um novo impulso.

### 1.9. O Grande Eclipse de 29 de julho de 1878

O grande teste observacional seria o que foi chamado na época, O Grande Eclipse de 29 de julho de

1878, o último eclipse total do século XIX (Fig. 7). A totalidade seria de três minutos e a sombra da Lua varreria todo o oeste americano. O fenômeno atraiu um grande número de astrônomos, entre eles três de grande reputação: James C. Watson (1838-1880), Simon Newcomb (1835-1909) e Christian H. F. Peters (1813-1890). Os dois primeiros eram simpáticos às previsões de Le Verrier, mas Peters era cético quanto a estas. Um talentoso astrônomo amador, Lewis Swift (1820-1913), que também via com bons olhos a hipótese de Le Verrier, realizaria observações independentes. De todos os astrônomos que participaram da observação do Grande Eclipse de 1878, apenas Watson e Lewis relataram ter observado objetos intramercuriais. Watson alegou ter observado dois objetos e Lewis, um único objeto que não coincidia com nenhum dos observados por



Figura 7 - O Grande Eclipse de 1878. A largura da faixa de totalidade é de aproximadamente 160 km (Imagem Chicago Times).

Watson. A análise de Peters ia de encontro às observações de Watson, que, provavelmente, havia observado duas estrelas em Câncer [14]. Quanto a Lewis, Peters sequer considerou sua observação [14]. A conclusão final é dura e tem o apoio de eminentes colegas de profissão: Vulcano não havia dado o ar de sua graça durante o Grande Eclipse de 1878. O mesmo aconteceria durante os eclipses de 11 de janeiro de 1880 e de 17 de maio de 1882, ambas com totalidade de um minuto [14].

## 2. Einstein e a precessão de Mercúrio

Em 1905, Albert Einstein publica cinco trabalhos fundamentais. Destes cinco trabalhos, dois dizem respeito à teoria da relatividade restrita (TRR), a saber: *Sobre a eletrodinâmica dos corpos em movimento* e *A inércia de um corpo depende de seu conteúdo de energia?* [15]. Com estes trabalhos, Einstein dá um fecho a um problema que recebeu a atenção e os esforços dos melhores teóricos da época, entre eles dois gigantes, H. Lorentz e H. Poincaré. Para Einstein, a condição especial dos referenciais inerciais galileanos na mecânica de Newton e dos seus equivalentes lorentzianos na TRR era inaceitável:

Como é possível que determinados corpos de referência (ou bem seus estados de movimento) sejam privilegiados frente a outros (ou frente a seus estados de movimento respectivos)? Qual é a razão deste privilégio? [16]

Einstein então dedica-se ao projeto de generalizar o princípio da relatividade restrita com o objetivo de incorporar os referenciais não inerciais, tendo como guia o Princípio da Relatividade Geral [16]:

As leis da natureza são válidas para todos os referenciais, quaisquer que sejam seus estados de movimento.

Em 1907, Einstein enuncia o Princípio da Equivalência, que desempenharia um importante papel na sua busca por uma teoria da relatividade geral (TRG). Uma consequência importante é a percepção de que uma TRG está intimamente relacionada com o problema da gravitação. Em 1911, prevê que a luz deve encurvar sua trajetória ao passar nas proximidades do Sol e que tal encurvamento poderia ser observado durante um eclipse solar. O ângulo de desvio é estimado em 0,83", metade do valor que estimaria mais tarde. Entre 1912 e 1913, trabalha com Marcel Grossman, que o introduz às geometrias não euclidianas. Finalmente, em 1915, durante o mês de novembro, apresenta perante a Academia Prussiana de Ciências quatro trabalhos fundamentais [17]. Os dois primeiros tratam das questões técnicas relacionadas com a implementação do princípio da covariância geral; o terceiro, o mais importante

**Einstein utilizando a TRG obtém o valor correto para a precessão do periélio de Mercúrio sem a necessidade de hipóteses ad hoc como a existência de novos planetas**

para os nossos propósitos aqui, faz uso do que hoje se conhece como aproximação pós-newtoniana, ou aproximação de campo fraco, e obtém um valor para a precessão de Mercúrio, de acordo com os dados experimentais da época: 42, 95 segundos de arco por século, computados por Newcomb [12]. No mesmo trabalho, também obtém o valor de 1,73 segundos de arco por século para o desvio da luz ao passar próximo ao Sol, o dobro do valor newtoniano e do valor estimado em 1911. No quarto trabalho apresentado perante a Academia, Einstein expõe a TRG completa, na forma como a conhecemos hoje. No que diz respeito à precessão de Mercúrio, o resultado obtido por Einstein e apresentado no dia 18 de novembro de 1915 na Academia é [16, 18]:

$$\Delta\bar{\omega} = 24\pi^3 \frac{a^2}{T^2 c^2 (1 - e^2)}, \quad (5)$$

onde  $a$  é o semieixo maior da órbita de Mercúrio;  $T$  é o seu período kepleriano; e  $e$  é a sua excentricidade. Fazendo uso da terceira lei de Kepler,

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{GM}, \quad (6)$$

onde  $M$  é a massa do Sol, segue a expressão equivalente

$$\Delta\bar{\omega} = \frac{6\pi GM}{ac^2(1 - e^2)}. \quad (7)$$

Substituindo os valores para  $G$ ,  $c$ ,  $M$ ,  $a$  e  $e$ , obtemos o valor correto do avanço do periélio de Mercúrio, aproximadamente 43" por século dentro dos limites do erro observacional da sua época, medidos por Simon Newcomb em 1882, que obtivera 42, 95" por século. Com este resultado, Einstein consegue explicar, sem recorrer a hipóteses adicionais, o avanço do periélio. A Ref. [19] apresenta uma formulação adequada para professores universitários e do Ensino Médio, bem como a estudantes no início da graduação.

O trabalho de 18 de novembro, mesmo baseado em uma versão incompleta da TRG, explica um problema que, como vimos acima, durante muito tempo atormentou os teóricos e faz uma previsão que seria verificada em 1919 [20]. A forma final da TRG apresentada em 25 de novembro

de 1915 não afetou estes resultados. Ela, essencialmente, se lê

$$\text{Geometria (curvatura) do espaço} - \text{Tempo} = \text{Constante} \times \text{Distribuição de matéria e energia.} \quad (8)$$

Nesse espaço-tempo quadridimensional, com as propriedades geométricas determinadas pela distribuição de matéria e energia, um corpo livre segue o ca-

minho extremo entre dois eventos, uma geodésica. No caso de Mercúrio, isto se revela no avanço do periélio. É possível mostrar que 1/3 do avanço se deve à parte espacial e 2/3 à parte temporal.

### 3. Modificando a lei da gravitação universal

Antes de concluir este trabalho, é interessante relembrar algumas das tentativas de modificar a lei da gravitação universal de modo a compatibilizar o modelo teórico dentro do referencial newtoniano e os resultados experimentais. Até a solução de Einstein, apresentada em novembro de 1915, foram muitas as tentativas de explicar o avanço do periélio de Mercúrio e podemos separá-las, grosso modo, em duas classes: as que tentam resolver o problema dentro do quadro da mecânica celeste newtoniana e envolvem ajustes de parâmetros relevantes, como as massas planetárias envolvidas; e modificações da lei da gravitação universal. Aqui, discutiremos um exemplo de modificação da lei da gravitação universal.

Em 1745, Clairaut propôs uma modificação na lei do inverso do quadrado para explicar a precessão do perigeu da Lua, tão importante para a navegação marítima da época [12]:

$$F(r) = GMm \left( \frac{1}{r^2} + \frac{d}{r^4} \right), \quad (9)$$

onde  $d$  é uma constante de valor diminuto. Clairaut, porém, voltou atrás ao perceber que a inclusão de mais termos perturbativos resolvia o problema e preservava a lei do inverso do quadrado.

No que diz respeito à precessão de Mercúrio, também se cogitou modificar a lei do inverso do quadrado. Em 1884, Asaph Hall [12] propôs uma lei de força dada por

$$F(r) = ar^n, \quad (10)$$

onde  $a$  é uma constante e  $n$  é um número inteiro. Hall demonstrou também que o avanço angular ( $\Delta\bar{\omega}$ ) entre dois periélios sucessivos era dado por  $2\pi(n+3)^{-1/2}$ . Para  $n = -2$ , o avanço angular é igual a  $2\pi$  e a órbita é fechada.<sup>4</sup> Podemos reescrever a equação do avanço angular entre dois periélios sucessivos obtida por Hall como

$$\Delta\bar{\omega} = 2\pi m^{-1/2}, \quad (11)$$

onde  $m = n + 3$ . Suponha que  $m = 1 - \delta$ . Então, supondo que  $\delta$  é um número pequeno, temos

$$\Delta\bar{\omega} = 2\pi(1 - \delta)^{-1/2} \approx 2\pi \left( 1 + \frac{\delta}{2} \right). \quad (12)$$

Se adotarmos o valor experimental da época de  $4,99 \times 10^{-7}$  radianos por revolução para o avanço do periélio de Mercúrio, podemos escrever

$$\Delta\bar{\omega} = 2\pi + 4,99 \times 10^{-7} = 2\pi \left( 1 + \frac{\delta}{2} \right). \quad (13)$$

Resolvendo esta equação para  $\delta$ , obtemos

$$\delta = 0,00000016. \quad (14)$$

Hall toma o valor do avanço do periélio como um dado fundamental e escreve  $n = -2,00000016$ . Posteriormente, Newcomb, usando um valor ligeiramente diferente para o avanço do periélio, obtém  $n = -2,0000001574$ . A análise de Newcomb trouxe uma mudança de paradigma no estudo do problema da órbita de Mercúrio, pois a partir dessa análise a lei da gravitação universal de Newton passou a ser questionada [19].

A hipótese de Hall-Newcomb funciona bem para Mercúrio, Vênus, Terra e Marte, mas encontra dificuldades quando aplicada aos demais planetas e seus satélites. Esta e outras leis de força alternativas para a gravitação são discutidas por Roseveare [12].

### 4. Observações finais

Embora a TRG seja até o momento a teoria da gravitação aceita pela comunidade de físicos e astrofísicos, há diversas situações em que é natural perguntarmos em que condições é mais apropriado usar a teoria relativística da gravitação de Einstein ou a Lei da Gravitação Universal de Newton. Um critério é dado por Hartle na Ref. [21]

$$R_{Schwarzschild} = \frac{2GM}{c^2},$$

onde  $M$  é a massa do corpo atrativo. Se  $R$  for o seu raio, então, omitindo o fator 2, a razão

$$\frac{R_{Schwarzschild}}{R} = \frac{GM}{Rc^2},$$

servirá como critério. Há duas possibilidades: se  $\frac{GM}{Rc^2} < 1$  ou então  $\frac{GM}{Rc^2} \ll 1$ , a situação é newtoniana (o que não impede a incorporação de correções relativísticas). Por outro lado, se  $\frac{GM}{Rc^2} \geq 1$ , a situação é einsteiniana. Por exemplo, no caso do Sol,  $\frac{R_{Schwarzschild}}{R} \approx 10^{-6}$ . No caso de estrelas relativísticas  $\frac{R_{Schwarzschild}}{R} \approx 0,1$  e no caso dos buracos negros  $\frac{R_{Schwarzschild}}{R} > 1$ .

O valor científico do resultado obtido por Einstein de 1915 está no fato de que seu resultado decorre naturalmente da teoria. Não há necessidade de hipóteses *ad hoc* como a existência de corpos adicionais ou modificações na lei da gravitação universal. O trabalho de Einstein de 1915 [18] contém também a previsão correta da deflexão da luz ao roçar o Sol, veja [20] para um relato minucioso. Lenzi, Pompeia e Studard discutem a deflexão da luz de um ponto de vista mais avançado [22] mas acessível a um aluno de graduação. Freitas [23] aborda o tema desde um ponto de vista histórico-



didático no nível do Ensino Médio. Para uma introdução à TRG, veja a Ref. [24]. Uma simulação da órbita de Mercúrio usando o *Modellus* pode facilmente ser reproduzida em sala de aula, como pode ser visto na Ref. [25].

Tendo como pano de fundo as grandes teorias clássicas - como a mecânica newtoniana, a gravitação universal de Newton e o eletromagnetismo clássico de Maxwell -, a TRG de Albert Einstein certamente merece ser considerada uma das mais fascinantes entre as teorias clássicas da física e, mais importante, até o momento todas as suas previsões teóricas, como a observação das ondas gravitacionais e os detalhes sobre a formação da imagem do buraco negro, foram confirmadas pelas observações experimentais.

## Agradecimentos

Os autores agradecem aos árbitros pela leitura minuciosa, comentários e sugestões que ajudaram os autores a aprimorarem a versão final. Os autores também agradecem a Jorge Antônio Gomes pela ajuda com as figuras. C.A.D.Z é parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) com a bolsa número 310703/2021-2 e pela Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (Faperj) com a bolsa número E-26/201.447/2021 (Programa Jovem Cientista do Nosso Estado).

Recebido em: 18 de Abril de 2023

Aceito em: 13 de Setembro de 2023

## Notas

<sup>1</sup>A Natureza e suas leis jaziam ocultas na noite; E Deus disse “Haja Newton” e tudo se fez luz.

<sup>2</sup>Ver nota de pé de página na p. 151 na Ref. [2] e p. 12 na Ref. [3].

<sup>3</sup>Tradução dos autores.

<sup>4</sup>Modernamente esse resultado é conhecido como teorema de Bertrand afirmando que apenas a lei da gravitação universal e a lei de força para um oscilador harmônico isotrópico apresentavam órbitas fechadas estáveis.

## Referências

- [1] J.P. Maury, *Newton e a Mecânica Celeste* (Objetiva, Rio de Janeiro, 2008), p. 144.
- [2] I.B. Cohen, *The Birth of a New Physics* (Reimpresso por Penguin Books, Londres, 1992), p. 258.
- [3] I. Newton, *The Principia, Mathematical Principles of Natural Philosophy*, the authoritative translation by I. B. Cohen and A. Whitman, assisted by J. Budenz, (University of California Press, Berkeley, 2016), p. 616.
- [4] I. Cohen, G.E. Smith, *The Cambridge Companion To Newton* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002), p. 516.
- [5] A.J. Snow, *The Monist* **34**, 543 (1924). [doi](#)
- [6] P. Schroeder, *La Loi de la Gravitation Universelle: Newton, Euler et Laplace* (Springer, Paris, 2007), p. 553.
- [7] L.D. Ferreiro, *Measure of the Earth* (Basic Books, New York, 2011), p. 378.
- [8] I. Newton, *Principes Mathématiques de la Philosophie Naturelle*, traduit du latin par feu madame la marquise du Chastellet, édition de 1759 (Hachette BNF, Paris, 2016), p. 436.
- [9] H.C. von Baeyer, *American Journal of Physics* **75**, 575 (2007). [doi](#)
- [10] T. Levenson, *The Hunt for Vulcan* (Random House, New York, 2016), p. 256.
- [11] P.S. Laplace, *Exposition du Système du Monde*, 2 volumes (Imprimerie du Cercle Social, Paris, 1796).
- [12] N.T. Roseveare, *Mercury's Perihelion: From Le Verrier to Einstein* (Oxford University Press, Oxford, 1982), p. 216.
- [13] N.F. Comins, W. J. Kaufmann III, *Descobrimos o Universo* (Bookman, Porto Alegre, 2010), p. 624.
- [14] R. Baum, W. Sheehan, *In Search of Planet Vulcan: The Ghost in Newton's Clockwork Universe* (Plenum, New York, 1997), p. 328.
- [15] J. Stachel, *O Ano Miraculoso de Einstein: Cinco Artigos Que Mudaram a Face da Física* (Editora UFRJ, Rio de Janeiro, 2005), p. 224.
- [16] A. Einstein, *A Teoria da Relatividade Especial e Geral* (Contraponto, Rio de Janeiro, 1999), p. 136.
- [17] A. Pais, ‘Subtle is the Lord...’ *The Science and the Life of Albert Einstein* (OUP, Oxford, 2005), p. 576.
- [18] A. Einstein, *Sitzungsberichte der Preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin* **2**, 844 (1915)
- [19] O.D. Miranda, *Conexão Ciência de Tecnologia* **13**, 7 (2019). [doi](#)
- [20] D. Kennefick, *No Shadow of a Doubt - The 1919 Eclipse That Confirmed Einstein's Theory of Relativity*. (Princeton University Press, Nova Jersey, 2019), p. 407.
- [21] J.B. Hartle, *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity* (Cambridge University Press, Cambridge, 2021), p. 602.
- [22] C.H. Lenzi, P.J. Pompeia, N. Studart, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **41**, e20190238 (2019). [doi](#)
- [23] F.S. Freitas, *A História da Física Presente na Sala de Aula: A Deflexão da Luz e os 100 Anos do Eclipse de Sobral*. Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Física, Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2021.
- [24] R.R. Machado, A.C. Tort, C.A.D. Zarro, *A Física na Escola* **19**(2), 3 (2021).
- [25] R.F.F. Cunha, A.C. Tort, *Revista do Professor de Física* **1**, 13 (2017). [doi](#)