



Paulo Victor Santos Souza^{1#} , Marcelo Alessandro Miranda Loretto dos Santos² , Rafael de Sousa Dutra³ , Antônio Marques dos Santos⁴ 

¹Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro, Volta Redonda, RJ, Brasil.

²Fundação de Apoio à Escola Técnica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil.

³Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio de Janeiro, Paracambi, RJ, Brasil.

⁴Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Norte, Natal, RN, Brasil.

Palavras-chave

sistemas complexos
auto-organização
emergência
sincronização
modelo de Kuramoto

Resumo

Neste trabalho, apresentamos uma simulação do modelo de Kuramoto e uma proposta didática para sua utilização no Ensino Médio no estudo de sistemas complexos. Utilizando a metodologia POE (Predizer-Observar-Explicar), os estudantes exploram, de forma sistemática, como o parâmetro de acoplamento K influencia a emergência da sincronização em osciladores acoplados. O roteiro investigativo conduz os alunos por sete etapas progressivas, desde sistemas sem acoplamento até estados de sincronização robusta, permitindo a observação direta da transição de fase e a compreensão do papel do parâmetro de ordem como medida quantitativa da coerência do sistema. A versatilidade da simulação permite extensões a contextos biológicos, como a neurociência e a ecologia, e adaptações para o ensino superior, incluindo aspectos mais sofisticados do modelo.

1. Introdução

A sincronização é um dos fenômenos mais fascinantes da natureza, manifestando-se em diferentes escalas - desde o piscar coordenado de vagalumes até as oscilações sincronizadas de neurônios no cérebro humano [1]. Esse comportamento coletivo emerge espontaneamente quando osciladores individuais interagem, resultando em padrões organizados. São exemplos notáveis a sincronização de células

marca-passo cardíacas [2], o alinhamento de ritmos circadianos em organismos vivos [3] e até mesmo a sincronização espontânea observada em pontes suspensas quando pedestres caminham em uníssono [4].

A sincronização pode ser modelada pelo modelo de Kuramoto

to [5], que tem sido aplicado com sucesso na compreensão de áreas como a neurociência [6], a ecologia [7] e a engenharia [8, 9]. A simplicidade

A sincronização pode ser modelada pelo modelo de Kuramoto, que tem sido aplicado com sucesso na compreensão de áreas como a neurociência, a ecologia e a engenharia

Autor de correspondência. E-mail: paulo.victor@ifrrj.edu.br.

Este é um artigo de acesso livre sob licença Creative Commons



<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/>

Copyright © 2026, Copyright by Sociedade Brasileira de Física. Printed in Brazil.

dade matemática do modelo de Kuramoto, combinada à sua capacidade de reproduzir comportamentos complexos de sistemas oscilatórios, torna-o particularmente adequado para fins educacionais, especialmente quando integrado a simulações computacionais que permitem a visualização da dinâmica do sistema.

Tendo essas ideias em conta, apresentamos neste texto uma simulação do modelo de Kuramoto especialmente desenvolvida para auxiliar no aprendizado do fenômeno da sincronização na educação básica, bem como uma proposta didática para sua utilização. Ainda que se trate de um fenômeno que tipicamente não faz parte do currículo regular do Ensino Médio no Brasil, esta proposta atrela-se a competências e habilidades estabelecidas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Por exemplo, a atividade contempla a habilidade EM13CNT301, que visa construir questões, elaborar hipóteses e empregar instrumentos para interpretar modelos explicativos, bem como a EM13CNT302, focada na comunicação de resultados de análises e experimentos a diversos públicos. Além disso, integra conceitos fundamentais de movimento harmônico simples e de oscilações com a modelagem matemática de fenômenos físicos, promovendo o desenvolvimento de habilidades de investigação científica por meio do uso de tecnologias digitais [10]. Por fim, é preciso mencionar que o estudo desse fenômeno tem função propedêutica, uma vez que estabelece as bases científicas para a compreensão de questões de natureza social, política e, sobretudo, ambiental [11]. A atividade proposta pressupõe que os estudantes possuam conhecimentos prévios sobre movimento harmônico simples e oscilações amortecidas e forçadas-conceitos tipicamente abordados na 2ª série do Ensino Médio.

A proposta didática utiliza como ponto de partida a apresentação de um vídeo que demonstra o famoso experimento dos metrônomos, que, inicialmente descompassados, começam a oscilar de forma sincronizada quando colocados sobre uma tábua apoiada em latas de refrigerante [12]. Essa demonstração visual gera imediatamente a questão investigativa central: “Por que e como os metrônomos se sincronizam?” O fenômeno observado pode ser compreendido por meio do modelo de Kuramoto, admitindo uma simplificação: o parâmetro de acoplamento K está diretamente relacionado às propriedades físicas do sistema e é inversamente proporcional à espessura da tábua. Assim, quanto mais fina a tábua, maior a transmissão de vibrações entre os metrônomos e, conseqüentemente, mais forte o acoplamento que leva à sincronização [13]. A metodologia didática utilizada na interação com a simulação é a POE (Predizer-Observar-Explicar), reconhecida como uma estratégia eficaz para promover aprendizagem ativa em ciências [14].

A proposta propõe o uso de simulações baseadas no modelo de Kuramoto para discutir conceitos como emergência e auto-organização

Os objetivos principais desta proposta incluem conectar fenômenos observáveis com modelos teóricos, demonstrando como a matemática pode descrever comportamentos complexos da natureza, desenvolver habilidades de investigação científica por meio do pensamento crítico e da capacidade de formular e testar hipóteses, utilizar simulações como ferramenta de aprendizagem e promover a compreensão de sistemas complexos, introduzindo conceitos de emergência e auto-organização de forma acessível [15].

2. O modelo de Kuramoto

O modelo de Kuramoto foi desenvolvido por Yoshiki Kuramoto na década de 1970 e, por meio de uma formulação matemática relativamente simples, é capaz de reproduzir comportamentos complexos observados em sistemas naturais [5]. O modelo descreve a dinâmica de N osciladores acoplados por meio da equação diferencial

$$\frac{d\theta_i}{dt} = \omega_i + \frac{K}{N} \sum_{j=1}^N \sin(\theta_j - \theta_i), \quad [1]$$

onde θ_i representa a fase do i -ésimo oscilador, ω_i é sua frequência natural, K é o parâmetro de acoplamento que quantifica a força da interação entre os osciladores e N é o número total de osciladores no sistema. Essa formulação assume que cada oscilador possui uma frequência natural própria e que a interação entre eles ocorre por meio de um termo de acoplamento senoidal que depende da diferença de fases.

O parâmetro de acoplamento K desempenha um papel fundamental na dinâmica do sistema. Quando K é pequeno, os osciladores evoluem quase independentemente, mantendo suas frequências naturais, com pequenas perturbações decorrentes das interações. À medida que K aumenta, as interações tornam-se mais significativas, podendo levar o sistema a estados em

que todos os osciladores sincronizam suas fases. No contexto do experimento dos metrônomos sobre uma tábua, K está intimamente relacionado às propriedades físicas do sistema de acoplamento. Especificamente, a espessura da tábua determina a eficiência da transmissão de vibrações entre

os metrônomos, estabelecendo uma relação em que K é inversamente proporcional à espessura da tábua [13]. Tábuas mais finas permitem maior transmissão de energia vibracional, resultando em um acoplamento mais forte e facilitando a sincronização. O parâmetro de ordem

$$r(t)e^{i\psi(t)} = \frac{1}{N} \sum \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j(t)} \quad [2]$$

indica até que ponto osciladores estão sincronizados. Na Eq. (2), $r(t)$ é o módulo do parâmetro de ordem e $\psi(t)$ representa a fase média do sistema. O parâmetro de

ordem r , que varia entre 0 e 1, fornece uma medida quantitativa da coerência do sistema. Quando $r \approx 0$, os osciladores estão distribuídos aleatoriamente no círculo de fases, indicando ausência de sincronização. Por outro lado, quando $r \approx 1$, todos os osciladores estão agrupados em uma pequena região do círculo de fases, o que caracteriza sincronização completa. Valores intermediários do parâmetro de ordem correspondem a estados de sincronização parcial, em que uma fração dos osciladores se sincroniza, enquanto os demais permanecem incoerentes.

Uma das características mais notáveis do modelo de Kuramoto é a existência de uma transição de fase em um valor crítico do parâmetro de acoplamento, K_c [16]. Para valores de K abaixo desse limiar crítico, o sistema permanece no estado incoerente com $r \approx 0$, independentemente das condições iniciais. Quando K excede K_c , emerge espontaneamente um estado sincronizado com $r > 0$, caracterizando uma transição de fase de segunda ordem análoga às observadas em sistemas magnéticos [1]. Essa transição representa um exemplo paradigmático de emergência em sistemas complexos, em que um comportamento coletivo organizado surge a partir das interações locais entre componentes individuais.

O valor crítico K_c depende da distribuição das frequências naturais dos osciladores. Para uma distribuição uniforme de frequências em um intervalo simétrico, pode-se mostrar analiticamente que $K_c = 2/(\pi g(0))$, onde $g(0)$ é o valor da densidade de probabilidade das frequências no ponto central da distribuição. Essa dependência ilustra como a heterogeneidade do sistema – representada pela largura da distribuição de frequências – afeta a facilidade com que a sincronização pode ser estabelecida.

3. A simulação

A simulação foi desenvolvida em Python¹, é compatível com o sistema computacional Windows e está disponibilizada como arquivo executável. Por essa razão, pode ser necessário adicionar o arquivo executável como confiável no antivírus instalado. Do contrário, o arquivo pode ser identificado como nocivo.

Na simulação, pode-se controlar o número de osciladores, o parâmetro de acoplamento, o valor médio da frequência angular, o tempo total de simulação e o número de passos. A simulação produz, em tempo real, quatro gráficos: a fase em função do tempo, o parâmetro de ordem em função do tempo, as velocidades angulares em função do tempo e a frequência de distribuição das fases. A simulação é iniciada no botão “Play” e pode ser pausada no botão “Pause”. É possível exportar os gráficos como figuras e baixar os dados utilizados na confecção dos gráficos em arquivos CSV. Na Fig. 1, apresentamos o layout da interface gráfica da simulação.

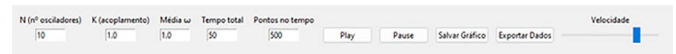


Figura 1 - Layout da simulação.

4. A proposta didática

A proposta didática sugerida nesta seção tem como intuito municiar o professor e possibilitar a aplicação mais imediata da simulação. A proposta utiliza a metodologia POE (Predizer-Observar-Explicar) como estratégia central para promover o aprendizado autoguiado e exploratório do fenômeno da sincronização. A seguir, a proposta é detalhada em quatro etapas.

4.1. Apresentação do fenômeno

A atividade inicia-se com a exibição de um vídeo que demonstra o experimento dos metrônimos: inicialmente descompassados, começam a oscilar de forma sincronizada quando colocados sobre uma tábua apoiada em latas de refrigerante. Essa demonstração visual serve como elemento problematizador, suscitando imediatamente questões investigativas. Após a exibição, promove-se uma discussão inicial com questões como “O que vocês observaram?” “O que acham que está acontecendo?” e, em seguida, o levantamento de hipóteses sobre as possíveis causas da sincronização observada.

4.2. Apresentação da simulação

Antes de iniciar as simulações, é fundamental que os estudantes compreendam a funcionalidade da simulação. A interface permite controlar diversos parâmetros: o número de osciladores sobre a “plataforma”, a constante K (que determina quão fortemente os osciladores se influenciam mutuamente), a média das velocidades angulares (sugerida em 1.0 rad/s para facilitar a compreensão), o tempo total de simulação (sugerem-se 50 s) e o número de atualizações durante esse período (sugerem-se 500 pontos).

A simulação produz quatro gráficos informativos: o primeiro mostra a evolução temporal do ângulo de cada oscilador (em radianos, com $\pi = 3$, oscilando entre 0 e 6 radianos); o segundo apresenta a velocidade angular de cada oscilador em função do tempo; o terceiro exibe o parâmetro de ordem, que quantifica o grau de sincronização (variando de 0 para ausência total de coincidência até 1 para coincidência perfeita), e o quarto mostra a distribuição dos osciladores em cada ângulo, evoluindo temporalmente.

4.3. Explorando cenários diferentes

Nessa etapa, são explorados diferentes cenários, por meio de simulações. Todas as oscilações são realizadas com três osciladores e com a média $\omega = 1.0$, e os pontos são sempre 500. As perguntas-base são as mes-

mas em cada cenário e perguntas extras são associadas a cenários específicos. Antes de iniciar a simulação, os alunos devem escrever em seus cadernos o que esperam que ocorra no comportamento geral do sistema e em cada gráfico. As perguntas são: “Represente o gráfico Fase (rad) & tempo(s) em seu caderno.”, “Como você descreveria o gráfico da evolução temporal da velocidade angular?”, “Os valores mudam com o tempo?”, “Por que você acha que isso acontece?”, “Faça o mesmo para o gráfico do parâmetro de ordem”, “Desenhe em seu caderno o círculo trigonométrico” e “Marque uma bolinha que represente aproximadamente a posição de cada oscilador após a simulação terminar”. Os cenários a serem explorados são apresentados no [Quadro 1](#).

Após completar todas as simulações, os estudantes devem responder às seguintes questões integradoras:

- Como você descreveria o fenômeno da sincronização?
- Quais são as evidências de que a sincronização está ocorrendo em um sistema composto por osciladores?
- Que fatores influenciam o aparecimento deste fenômeno?

5. Comentários finais

Este trabalho apresentou uma proposta didática inovadora para o ensino de sistemas complexos no Ensino Médio, com o fenômeno da sincronização como tema central. A proposta didática estruturou-se em torno da metodologia POE (Predizer-Observar-Explicar), oferecendo um roteiro investigativo sistemático, composto por sete etapas principais que conduzem os estudantes por uma sequência progressiva de explorações, iniciando com sistemas sem acoplamento ($K = 0$) e avançando gradualmente para valores crescentes do parâmetro de acoplamento.

A compreensão da sincronização de osciladores mecânicos pode oferecer a fundamentação necessária para o estudo de fenômenos sociais, políticos e ambientais

Um dos dividendos da proposta é oferecer subsídios para que os estudantes estudem a sincronização em outros contextos, como a ecologia, por exemplo. Com efeito, o modelo pode ser aplicado ao estudo de fenômenos que vão desde ciclos circadianos em populações de organismos até as piscadas sincronizadas de vagalumes, passando pelos ritmos migratórios de aves. A interdisciplinaridade inerente a essas aplicações representa uma oportunidade valiosa para projetos integrados entre física e biologia, promovendo uma compreensão mais holística dos fenômenos naturais. A simulação desenvolvida possui características que facilitam sua adaptação em cursos de graduação e pós-graduação. No ensino superior, a ferramenta poderia ser expandida para incluir aspectos mais sofisticados do modelo de Kuramoto, como diferentes topologias de rede de acoplamento e a análise linear da estabilidade da transição de fase.

A proposta apresentada neste texto foi implementada em formato piloto em uma escola da Rede Federal de Instituições de Educação Profissional, Científica e Tecnológica, com 40 alunos do curso integrado de automação industrial. Para tentar mensurar, ainda que de maneira preliminar, os resultados da intervenção, solicitou-se aos estudantes que, após realizarem as atividades apresentadas na proposta, respondessem à seguinte pergunta: “O que você aprendeu ao desenvolver as atividades?” As respostas dos alunos foram analisadas com base no método de análise de conteúdo de Bardin [17]. Dessas análises, emergiram as categorias apresentadas no [Quadro 2](#).

Os resultados da análise de conteúdo sugerem que a experiência foi bem-sucedida. A predominância da categoria “Sincronização Natural” (35%) indica que os alunos conseguiram transcender a mera observação experimental e desenvolver uma compreensão concei-

Quadro 1: Proposta de cenários a serem investigados.

Cenário	K	Tempo total	Questões extras
1	0	50s	Nenhum
2	0.1	50s	Nenhum
3	0.6	50s	Alguma coisa mudou no comportamento dos osciladores? Se houve mudança, explique por quê.
4	1.2	50s	Alguma coisa mudou no comportamento dos osciladores em relação ao caso anterior? Se houve mudança, explique por quê. Você diria que os osciladores se sincronizaram em algum momento? Justifique sua resposta com base no comportamento dos gráficos.
5	2.0	50s	Alguma coisa mudou no comportamento dos osciladores em relação ao caso anterior? Se houve mudança, explique por quê. Você diria que os osciladores se sincronizaram em algum momento? Justifique sua resposta com base no comportamento dos gráficos. Em que caso, $K = 0.6$ ou $K = 1.2$, a sincronização é mais estável? Sugestão: compare os gráficos do parâmetro de ordem em cada caso. Acha que dá para afirmar se houve ou não sincronização olhando para o gráfico do parâmetro de ordem?
6	2.0	50s	Tente explicar, em suas próprias palavras, o que acontece à medida que você escolhe um valor de K cada vez maior.
7	2.0	150s	Execute a simulação com tempo estendido, observe o que aconteceu e tente explicar.

Quadro 2: Categorias emergentes das respostas dos alunos.

Categoria	(%)	Descrição das características	Exemplo de resposta
Sincronização natural	35%	Respostas que enfatizam a sincronização como um fenômeno natural e automático do universo, sem necessidade de comando externo	“Aprendi que o Universo por si próprio se organiza, sem que alguém mande”
Mecanismo de sincronização	22,5%	Explicações sobre como ocorre o processo de sincronização, incluindo fatores como superfície móvel, comunicação entre objetos e tempo	“Aprendi que a natureza está sujeita a sempre buscar sincronismo, e que por isso quando por exemplo tem alguém correndo na minha frente eu tendo a querer correr na mesma velocidade”
Experimento dos metrônomos	20%	Foco específico no experimento realizado com metrônomos, descrevendo o procedimento e observações diretas	“Hoje vimos a sincronização de metrônomos que só acontece em cima de uma base ‘móvel’ (no caso, um pedaço de papelão em cima de duas latinhas de Fanta)”
Teoria de Kuramoto	12,5%	Menções específicas à teoria de Kuramoto sobre osciladores e busca por velocidade/frequência média	“Uma das possíveis soluções foi a de Kuramoto, que diz que os osciladores buscam uma velocidade ideal e por isso se sincronizam, eles buscam a velocidade média entre eles”
Fenômeno inexplicável	10%	Reconhecimento de que a sincronização é um mistério científico ainda não completamente compreendido	“Esse fenômeno ainda não possui uma explicação correta” / “não existe uma explicação óbvia desde muito tempo”

tual mais ampla sobre a auto-organização e a ordem emergente no universo. A distribuição equilibrada entre as demais categorias - desde explicações mecânicas (22,5%) até o reconhecimento da complexidade científica (10%) - sugere que a metodologia utilizada foi eficaz em estimular diferentes níveis de pensamento, do concreto ao abstrato. Particularmente relevante é o fato de que 20% dos alunos valorizaram especificamente o experimento dos metrônomos, o que demonstra que a experiência prática serviu de âncora para a construção do conhecimento teórico. Por outro lado, o reconhecimento, por parte de alguns estudantes, de que se trata de um “fenômeno inexplicável” revela que

nem todos desenvolveram uma visão minimamente científica sobre o tema e que talvez sejam necessários ajustes para que esses alunos também sejam alcançados. Os resultados, portanto, levam-nos a crer que a proposta tem potencial para promover a compreensão do fenômeno da sincronização, do papel dos modelos na descrição da realidade e da fundamentação científica que estabelece a base conceitual para a correta interpretação de fenômenos sociais, políticos e ambientais [18-20].

Recebido em: 25 de Agosto de 2025

Aceito em: 17 de Novembro de 2025

Nota

¹O simulador está disponível para download no endereço: <https://drive.google.com/file/d/1e2yG9skatoRoWcoKjISrOGQu5LQndp-aw/view?usp=sharing>

Referências

- [1] S. Strogatz, *Sync: The Emerging Science of Spontaneous Order* (Hyperion Books, New York, 2003).
- [2] L. Glass, *Nature* **410**, 277 (2001). [doi](#)
- [3] T. Roenneberg, M. Merrow, *Current Biology* **26**, R432 (2016). [doi](#)
- [4] S.H. Strogatz, M.L. Eckhardt, I. Pantaleone, B.R. Knight, L. Glass, *Nature* **438**, 43 (2005). [doi](#)
- [5] Y. Kuramoto, *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence* (Springer-Verlag, Berlin, 1984). [doi](#)
- [6] M. Breakspear, S. Heitmann, A. Daffertshofer, *Frontiers in Human Neuroscience* **4**, 190 (2010). [doi](#)
- [7] R.E. Mirollo, S.H. Strogatz, *SIAM Journal on Applied Mathematics* **50**, 1645 (1990). [doi](#)
- [8] F. Dörfler, F. Bullo, *Automatica* **50**, 1539 (2014). [doi](#)
- [9] R.L. Viana, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **42**, e20200272 (2020). [doi](#)
- [10] M. Pietrocola, A. Pogibarov, T.R. de Souza, *Física em Contextos: Pessoal, Social e Histórico* (FTD, São Paulo, 2011).
- [11] I.J.C. de Paulo, *A Física na Escola* **23**, e240259 (2025). [doi](#)
- [12] M. Bennett, M.F. Schatz, H. Rockwood, K. Wiesenfeld, *Proceedings of the Royal Society of London Series A* **458**, 563 (2002). [doi](#)
- [13] J. Pantaleone, *American Journal of Physics* **70**, 992 (2002). [doi](#)
- [14] R. White, R. Gunstone, *Probing Understanding* (Falmer Press, London, 1992).
- [15] G. Watanabe, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **43**, e20200416 (2021). [doi](#)
- [16] A.S. Reis, F.A.S. Ferreira, J.C. Sartorelli, *Revista Brasileira de Ensino de Física* **44**, e20210368 (2022). [doi](#)
- [17] L. Bardin, *Análise de Conteúdo* (Edições 70, Lisboa, 2011).

- [18] D.A. do Nascimento, N.H.A de Albuquerque, M.H.C. Alves, P.V.S. Souza, A Física na Escola **23**, e250311 (2025). [doi](#)
- [19] P.V.S Souza, R.S. Dutra, M.A.L. dos Santos, A.M. dos Santos, Physics Education **61**, 25006 (2026). [doi](#)
- [20] D. Baranov. Science in School **74**, 1 (2025). disponível em <https://scienceinschool.org/wp-content/uploads/2025/09/Issue-74-Collective-phemonomena.pdf>. Acesso em 11/02/2026.