A Física na Escola, v. 22, 230108, 2024
Artigos
http://www1.fisica.org.br/fne/
Doi: 10.59727/fne.v22i1.08

Emanuel Pinheiro Santos[1#]

[1]Departamento de Física, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE, Brasil.

Palavras-chave
caminhante aleatório
ensino de física
jogos didáticos

Resumo

Caminhada aleatória é qualquer deslocamento descrito por passos aleatórios. Na prática, situações como esperar em filas ou um animal buscando alimentos são exemplos de fenômenos explicados por meio de caminhadas aleatórias. Esse tema introduz conceitos de probabilidade e estocasticidade, que são fundamentais para qualquer medida real. Diante da relevância do assunto e da falta de trabalhos com linguagem acessível a todos os níveis de educação, desenvolvemos uma dinâmica para a abordagem do conteúdo de caminhadas aleatórias que pode ser realizada em sala de aula, em casa ou por meio de simulações computacionais simples. A dinâmica proposta envolve um caminhante aleatório que, a pedido do rei, tem a missão de coletar e redistribuir moedas em todo o reino. O objetivo é compreender o motivo pelo qual o rei decidiu abdicar dos impostos que cobrava, em troca de implementar essa dinâmica com o caminhante. Além disso, adaptamos o desafio para introduzir a distribuição normal e criamos uma animação da evolução da dinâmica. O desafio proposto é uma tarefa transdisciplinar que conecta conhecimentos de física e matemática a um contexto histórico remetente à Idade Média, proporcionando reflexão, imaginação e aprendizado. A dinâmica pode ser realizada de várias maneiras diferentes, incluindo adaptações. Dentre as possibilidades, destacamos a realização em sala de aula com participação efetiva dos estudantes, em casa por meio da confecção de um tabuleiro ou ainda por simulações computacionais, que podem ser acompanhadas pelo docente no laboratório de informática ou realizadas em casa pelo próprio estudante em seu computador. Os algoritmos utilizados para realizar a simulação são simples e estão disponíveis.

[#] Autor de correspondência. E-mail: emanuel.pinheiro@ufpe.br.

1. Introdução

Em um contexto geral, a estatística foi amplamente utilizada por físicos como Maxwell, Boltzmann, Gibbs, Planck e outros, do final do século XIX ao início do século XX, para estudar a termodinâmica, o movimento de partículas e estabelecer os ensembles estatísticos que se conectam com diferentes sistemas físicos [1,2]. No século XX, Albert Einstein aplicou conhecimentos estatísticos para explicar o movimento browniano [3], que hoje reconhecemos como o exemplo mais clássico de passos aleatórios. Graças à relevância dessa ciência, a física estatística possibilitou a explicação de fenômenos como transições de fase, processos de difusão e caminhadas aleatórias [4,5], entre outros. Este trabalho tem como foco a caminhada aleatória.

Caminhada aleatória, na física, é entendida como qualquer movimento cujos passos são imprevisíveis, com uma probabilidade associada a cada direção permitida. Embora o conceito de caminhantes aleatórios seja amplamente descrito em textos de nível superior [2,5], há uma lacuna quanto à introdução desse conteúdo para leitores em geral ou em níveis acessíveis à educação básica. Problemas envolvendo caminhadas aleatórias oferecem um conhecimento aplicado de temas como probabilidade, densidades de probabilidade e estocasticidade, que são fundamentais para qualquer medida real.

Muitos processos naturais e cotidianos podem ser explicados por caminhadas aleatórias, como a busca por alimentos, deslocamento de humanos e dinâmicas financeiras, entre outros [6-8]. Considerando que vivemos em um mundo probabilístico, processos físicos envolvendo probabilidade deveriam receber maior atenção no ensino básico. Temas relacionados à probabilidade em jogos e dinâmicas voltadas para a educação básica têm sido bem explorados [9-11], pois esse tipo de atividade promove bons resultados na aprendizagem [12,13]. No entanto, o tema do caminhante aleatório é geralmente abordado em textos voltados para o nível superior, como exemplificado em [14,15]. Constata-se, assim, uma escassez de trabalhos que abordem a caminhada aleatória e suas aplicações dentro da física no contexto escolar.

Processos naturais e cotidianos podem ser explicados por caminhadas aleatórias, daí o interesse de estudar esse assunto em física

Em 2014, foi desenvolvido um trabalho que introduziu o conceito de "passeio aleatório" para alunos do ensino fundamental e do Ensino Médio [16]. No entanto, esse estudo focava em uma sequência didática sobre probabilidade, sem discutir de maneira aprofundada a relevância e as aplicações da caminhada aleatória.

Diante dessas perspectivas, desenvolvemos neste trabalho um desafio intitulado "O caminhante que leva moedas", cujo principal objetivo é promover reflexão, raciocínio e aprendizado sobre o conceito de caminhada aleatória. O desafio proposto pode ser realizado em sala de aula, em casa ou por meio de simulações computacionais.

2. O caminhante que leva moedas

2.1. Descrição

Um certo reino era dividido em nove casas, sendo que no centro ficava o castelo, onde residia o rei, enquanto nas outras oito casas localizavam-se as vilas (Fig. 1). Nesse reino, existia uma lei que determinava que, no dia da cobrança dos impostos, todo o reino (vilas + rei) deveria entregar 25% do total de suas moedas ao rei, enquanto o restante das moedas era dividido igualmente entre as casas. Por exemplo, supondo que o reino inteiro possuísse 1.000 moedas, 250 seriam destinadas ao rei e as 750 restantes seriam distribuídas entre as vilas, resultando em 93,75 moedas para cada uma. Em um determinado dia, o conselho do rei tomou uma decisão perspicaz e anunciou que a taxa fixa de 25% não seria mais cobrada. O motivo dessa decisão estava relacionado a uma estratégia genial que havia sido elaborada.

Figura 1 - Posição das casas no reino do problema.

A estratégia do rei foi contratar um caminhante para intermediar a movimentação da economia do reino da seguinte maneira:

1. A dinâmica começa com cada parte do reino se preparando para contribuir com uma moeda. Para simplificar a explicação, consideraremos uma moeda por casa (o que não perde a generalidade para uma quantidade maior de moedas, que simbolizam a soma das moedas do reino). Assim, todas as nove casas (incluindo a do rei) deixarão uma moeda para o caminhante coletar.
2. O caminhante segue até a primeira casa. Suponha que ele comece pela casa inferior direita (vila 0). Chegando lá, ele coletará a moeda e a levará para entregar a outra casa que seja uma das vizinhas mais próximas, de acordo com a Fig. 2.
3. O critério para escolher qual casa receberá a moeda coletada foi estabelecido pelo rei da seguinte maneira: "Farás um sorteio em todas as vilas para destinar a moeda coletada a outra casa. No sorteio, deve haver três possibilidades: vizinho posterior, vizinho anterior ou o rei."
4. Ao retornar ao castelo, a moeda do rei também será doada. O rei determinará que seja sorteada uma das oito vilas para receber sua moeda.
5. Em resumo, o caminhante coletará uma moeda em cada casa e, aleatoriamente, sorteará um vizinho próximo para recebê-la. Cada vila perderá uma moeda, mas poderá receber mais de uma. O rei é considerado vizinho próximo de todas as vilas.

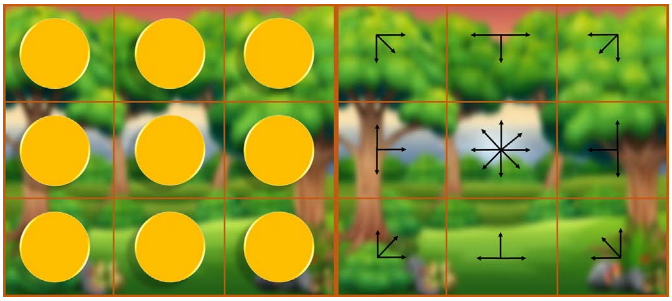

Figura 2 - As vilas e o rei iniciam com a mesma quantia de moedas (lado esquerdo). O caminhante vai visitar cada vila para coletar uma moeda que dará para um dos primeiros vizinhos próximos, de acordo com as setas pretas (lado direito).

2.2. O desafio

O rei então se animou ao ver o resultado da dinâmica. E foi assim que ficou decretado que essa dinâmica seria realizada com frequência, em vez de cobrar o imposto de 25% das moedas, como fazia. Desafio: por que o rei tomou essa decisão?

2.3. A resposta

É um tanto óbvio que o rei tem maior probabilidade de ganhar mais moedas devido a sua posição central. Ou seja, cada uma das 8 vilas pode passar sua moeda para o rei com 1/3 de probabilidade, mas essa probabilidade não é igual para passar a moeda para qualquer outra vila, uma vez que elas estão limitadas a sua vizinha mais próxima. A questão aqui é: “Por que o rei vai tirar os impostos, que eram fixos em 25% das moedas, e substituí-los por uma dinâmica probabilística em que existe até a possibilidade de ele não receber nenhuma moeda?” e “O rei terá perdas ou ganhos com essa dinâmica?” Para resolver esse problema, fizemos a simulação do jogo para várias iterações (que equivalem ao tempo).

Na Fig. 3, mostramos duas situações finais após um dia em que foi realizada a dinâmica com o caminhante. Na primeira vez, o rei (casa 4) coletou em torno de 20% das moedas, enquanto na segunda vez coletou mais de 50% das moedas. Na primeira vez, ele saiu perdendo, pois, como era de costume, o imposto renderia 25% das moedas. No entanto, na segunda vez, houve um faturamento generoso, melhor do que o antigo imposto. Devemos notar ainda que existe a possibilidade de o rei não faturar, o que ocorre quando todos os sorteios nas vilas favorecem seus vizinhos à direita ou à esquerda, mas não o rei.

Em cada realização da Fig. 3, as vilas que receberam as moedas de suas vizinhas estão organizadas na Tabela 1. No final de muitas rodadas, os resultados estão estabelecidos na Fig. 4.

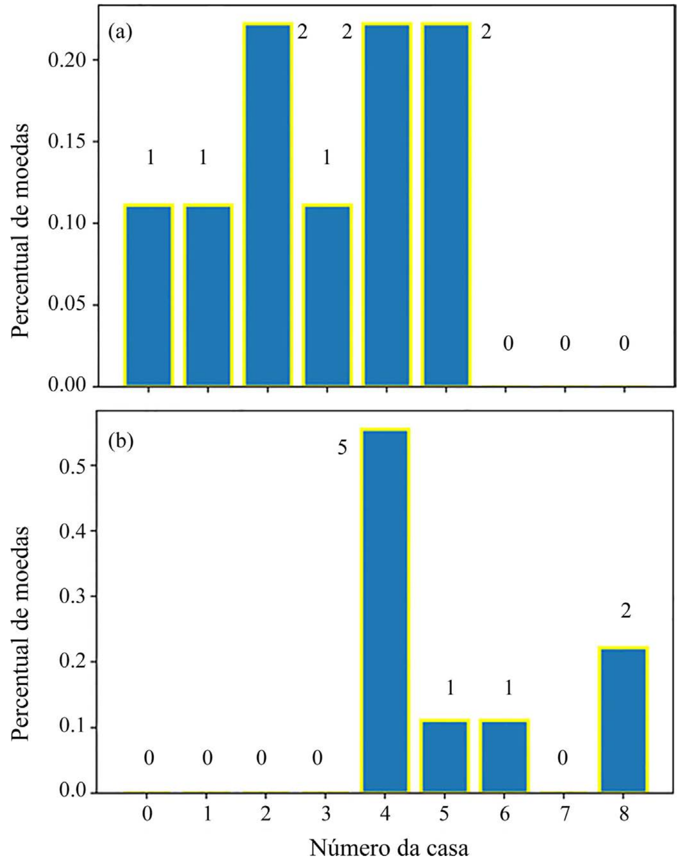

Figura 3 - Percentual de moedas que sobrou para cada casa em rodadas diferentes. Os números indicam a quantidade de moedas que cada casa teve ao final da iteração na (a) rodada 1 e na (b) rodada 2.

No entanto, o real motivo pelo qual o rei se animou ao trocar o imposto fixo pela dinâmica é que ele percebeu que, após muitas realizações, ele arrecadaria 5% a mais das moedas (considerando a mesma quantia de moedas para a antiga cobrança do imposto fixo). Ou seja, o imposto total passou de 25% para 30%, como podemos verificar na Fig. 4.

Devemos notar que esse resultado também pode ser obtido por meio da distribuição binomial. A distribuição binomial é uma distribuição estatística em que os eventos têm apenas dois possíveis resultados em cada iteração independente. No nosso problema, o

Tabela 1: Doação das moedas referente à Fig. 3.

Vila doadora	Vila que recebeu (rodada 1)	Vila que recebeu (rodada 2)
VILA 0	VILA 5	VILA 5
VILA 1	VILA 2	REI 4
VILA 2	VILA 1	REI 4
VILA 3	VILA 4	VILA 8
REI 4	VILA 2	VILA 8
VILA 5	VILA 0	VILA 6
VILA 6	VILA 5	REI 4
VILA 7	REI 4	REI 4
VILA 8	VILA 3	REI 4

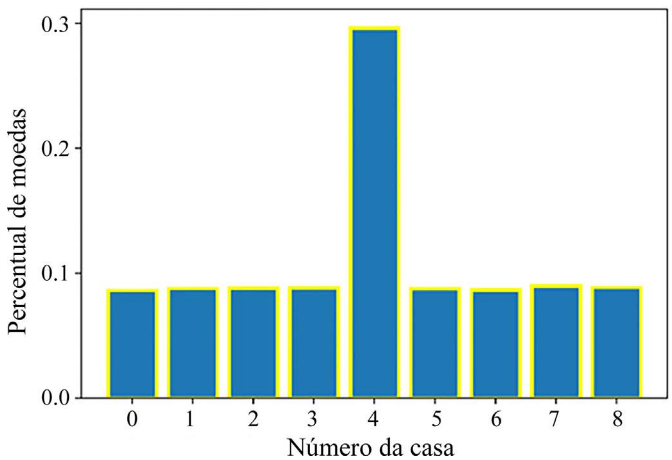

Figura 4 - Após uma quantidade muito grande de realizações (10.000, nesse resultado), o percentual de moedas é aproximadamente igual para cada casa (0.09), exceto para o rei (0.29).

rei pode ou não obter a moeda de cada vila, ou seja, o rei obter a moeda de cada vila consiste em dois possíveis resultados. Considerando M como a quantidade total de moedas que o rei pode obter após N iterações, o valor médio para uma variável binomial é dado por [2]

$$M = pN, \tag{1}$$

em que p é a probabilidade de obter a moeda de cada vila. No nosso caso, o rei pode obter a moeda de cada vila com p = 1/3 de probabilidade. Logo, para uma rodada, a quantidade de chances de o rei obter uma moeda é N = 8, que é o número de vilas que podem dar a moeda. Desse modo $M = 8/3 \cong 2.67$, enquanto no experimento (Fig. 4) o rei coletou $0.29 * 9 \cong 2.61$ moedas, em média. A comparação direta entre experimento e teoria deve tender a valores próximos, em que as diferenças estão associadas à estocasticidade do problema.

Na hipótese em que não há privilégio para o rei, ou seja, se o caminhante sortear a moeda coletada para qualquer outra casa com iguais probabilidades, sem restrição para os primeiros vizinhos, então, ao final de muitas realizações, todas as casas receberão iguais percentuais de moedas (Fig. 5).

Usando a Eq. (1), teríamos p = 1/8 com N = 8, logo $M = 1$ moeda. De acordo com a Fig. 5, o rei coletou $0.11 * 9 \cong 1$ moeda na média, mostrando assim o acordo com a teoria.

3. A distribuição normal (gaussiana) para muitas vilas

Agora vamos imaginar uma nova situação. Em cada vila, o caminhante gira uma moeda de modo que, se der “cara”, o rei irá contribuir com uma moeda para aquela vila poder desenvolver sua infraestrutura. Caso contrário (se o resultado do lançamento for “coroa”), a vila não receberá a cortesia fornecida pelo monarca. No final dessa nova dinâmica, o caminhante irá informar ao rei quantas moedas ele forneceu para o reino.

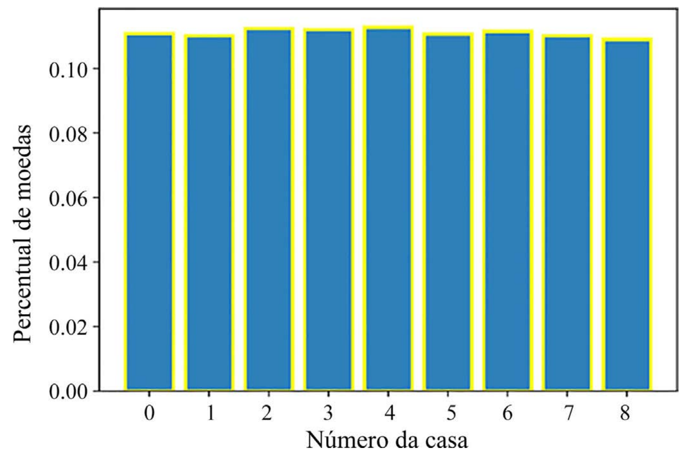

Figura 5 - Após uma quantidade muito grande de realizações (10000 nesse resultado), o percentual de moedas é aproximadamente igual para cada casa (0.11).

Durante as iterações, cada vila tem 50% de chance de ganhar a cortesia dada pelo rei. Vamos imaginar que, com o passar do tempo, a quantidade de vilas aumentou para 1.000. Então, durante uma iteração (isto é, o caminhante passar por todas as vilas), é mais provável que 500 delas recebam a moeda dada pela majestade. A probabilidade de que todas as vilas recebam (ou que todas não recebam) a moeda é baixíssima, pois, para que isso ocorra, seria necessário que todas as moedas lançadas pelo caminhante dessem o mesmo resultado.

Após muito tempo, o rei decidiu fazer um gráfico mostrando a distribuição da quantidade de moedas dadas ao longo dos anos em seu reino composto por 1.000 vilas (Fig. 6). O resultado obtido é uma distribuição normal (ou gaussiana) centrada em 500, ou seja, a maior probabilidade é que apenas metade das vilas recebam o tributo dado pelo rei. Isso pode ser explicado pelo teorema do limite central, em que a soma de um conjunto de variáveis aleatórias (nesse caso, a soma das moedas para cada vila, considerando várias

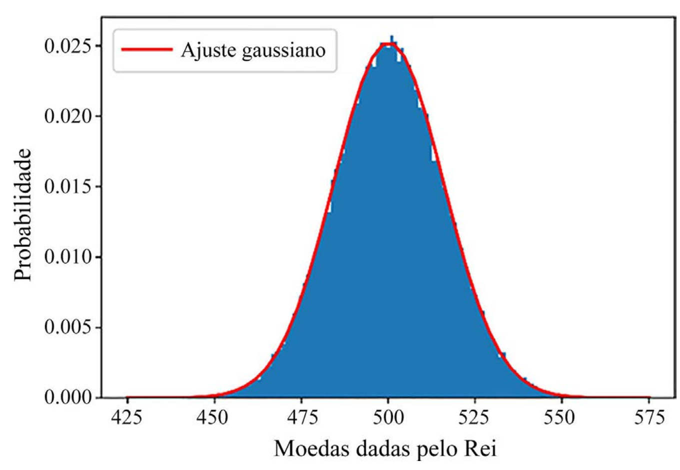

Figura 6 - Distribuição normal - ver animação e códigos em https://youtu.be/VNohI-c_L1I.

iterações) independentes entre si (cada lançamento de moeda independe do lançamento anterior), com média (número médio de vilas que irão receber a moeda) e variância (dispersão que mede a distância da média) finitas, converge para uma distribuição normal.

A linha vermelha é o ajuste gaussiano usando a distribuição normal dada por

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \tag{2}$$

em que σ é o desvio padrão da distribuição e μ localiza o centro da distribuição. Os parâmetros de ajuste na Fig. 6 foram $\sigma = 16$ e $\mu = 500$.

Esse segundo experimento é exatamente análogo ao caminhante aleatório que aparece nos cursos de física estatística, em que, em vez dos passos aleatórios (dar um passo para a direita = cara; dar um passo para a esquerda = coroa), temos as moedas dadas pelo rei (dar a moeda = cara; não dar a moeda = coroa). Esse é o caso do caminhante aleatório em uma dimensão, que pode dar um passo para a direita com probabilidade p, enquanto o passo para a esquerda tem probabilidade $1 - p$, tal que a distribuição de passos é descrita por uma distribuição binomial [2]. No limite de muitos passos ou na soma dos passos de muitos caminhantes, o comportamento tende para uma distribuição gaussiana, de acordo com o teorema do limite central. Embora seja um conteúdo aplicado em cursos superiores, com a contextualização do jogo das vilas aqui apresentada, torna-se uma tarefa promissora e desafiadora para a introdução do conceito na educação básica ou até mesmo em cursos de graduação.

Nesse contexto, nota-se que é possível abrir espaço para a introdução da distribuição normal sem fazer cálculos, apenas girando a moeda e aprendendo com o experimento. Isso se torna importante, pois é essa distribuição que descreve muitas observações reais, como altura e peso das pessoas, entre outras [17,18]. Vale notar que essa simulação é do tipo Monte Carlo [19], então ainda é possível introduzir esse tópico para uma turma mais técnica.

A dinâmica de introduzir a curva gaussiana pode tornar-se muito mais atrativa ao se verificar como ela se constrói por meio de uma animação. Desse modo, construímos uma simulação com 10.000 iterações para mostrar como a distribuição evolui até a gaussiana. A animação pode ser visualizada em [20]. A evolução da distribuição gaussiana, nesse experimento, ocorre da seguinte maneira:

- Consideramos que existem 1.000 vilas, em que cada uma pode ou não receber uma moeda do rei.
- Fazemos um sorteio nessas vilas para saber quais receberão. Guardamos a quantidade total de moedas que foram dadas (que deve ser entre 0 e 1.000).
- Repetimos esse processo muitas vezes (fizemos nesse experimento com 10.000) e ao final, construímos o histograma dos valores obtidos.

4. Códigos

Os códigos para simular os experimentos podem ser acessados na descrição da animação [20]. A linguagem de programação sugerida é Python, portanto o programa pode ser acessado e executado até mesmo sem a necessidade de usar softwares instalados - por exemplo, utilizando o Google Colab. O autor correspondente está disponível para quaisquer dúvidas.

5. Conclusão

O experimento do *Caminhante que leva moedas* pode ser realizado em casa, com a ajuda de um tabuleiro similar ao da Fig. 1. Nesse caso, deve-se construir um tabuleiro 3×3 e usar um sorteador de 3 números para destinar a direção do caminhante, como na Fig. 2. É fácil encontrar aplicativos e sites que sorteiam números, ou pode-se usar um dado e dividir os números em duplas.

Em sala de aula, uma proposta para a dinâmica é colocar 9 cadeiras no formato 3 × 3 e pedir a participação de 9 estudantes, cada um ocupando uma das cadeiras com uma moeda. Os "caminhantes" agora serão todos os estudantes participantes. O professor ou outro estudante pode sortear uma das 3 direções (Fig. 2) para cada cadeira, e o estudante nela sentado irá entregar sua moeda conforme o sorteio.

Apresentamos, portanto, uma alternativa ao problema usual do caminhante aleatório que pode ser utilizado em sala de aula com facilidade

O processo torna-se interessante quando é repetido algumas vezes, permitindo verificar as tendências aqui discutidas. Desse modo, com a mesma animação que fizemos para a Fig. 6, os leitores também podem acessar o código e adaptá-lo para criar uma animação análoga para a Fig. 4.

Apresentamos, portanto, uma alternativa ao problema usual do caminhante aleatório, que pode chamar a atenção de estudantes em todos os níveis de educação por ser dinâmica, em forma de jogo e permitir a imersão em um contexto histórico.

Os conceitos como probabilidade, distribuição, quantidade, histograma e outros abordados neste trabalho podem ser explorados em diversos campos das ciências, como termoestatística, finanças, empreendedorismo, bioestatística, entre outros, cujas aplicações estão presentes em nosso mundo.

Recebido em: 17 de Agosto de 2023
Aceito em: 30 de Outubro de 2024

Referências

[1] H.B. Callen, H.L. Scott, American Journal of Physics **66**, 164 (1998).
[2] S.R.A. Salinas, *Introdução à Física Estatística* (EDUSP, São Paulo, 2013), 2ª ed.
[3] S.R.A. Salinas, Revista Brasileira de Ensino de Física **27**, 263 (2005).
[4] E. D. Leonel, *Fundamentos Da Física Estatística* (Editora Blucher, São Paulo, 2015).
[5] L.E. Reichl, *A Modern Course in Statistical Physics* (John Wiley Sons, New York, 1999), 2^a ed.
[6] J.J. Collins, C.J. De Luca, Phys. Rev. Lett. **73**, 764 (1994).
[7] G.L. Vasconcelos, Braz. J. Phys. **34**, 1039 (2004).
[8] M. Gandhimohan, M. Viswanathan, M.G.E. da Luz, E.P. Raposo, H.E. Stanley, *The Physics of Foraging: An Introduction to Random Searches and Biological Encounters* (Cambridge University Press, Cambridge, 2011).
[9] S. Campos, E.S. Novais, Encontro Nacional de Educação Matemática **10**, 1 (2010).
[10] N.H. Hurtado, J.S. COSTA, in *Anais Da Conferência Internacional: Experiências e Perspectivas do Ensino da Estatística - Desafios Para o Século XXI* (1999), pp. 124-136.
[11] E.M. Viana, J.A. Silva, Revista Eletrônica de Educação Matemática **16**, 1 (2021).
[12] V.M. Fraga, M.C.A. Moreira, M.V. Pereira, Caderno Brasileiro de Ensino de Física **38**, 174 (2021).
[13] G.R. Gonzaga, J.C. Miranda, M.L. Ferreira, R.C. Costa, Revista Educação Pública **17**, 7 (2017).
[14] R.M.D. Gomes, *Caminhantes Aleatórios Com Perfil de Memória Binomial*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2016.
[15] L. Morgado, L.S. Borges, C.Q.D. - Revista Eletrônica Paulista de Matemática **8**, 27 (2016).
[16] V.Y. Kataoka, C.B. Silva, I. Cazorla, Quadrante **23**, 23 (2014).
[17] A. Lyon, The British Journal for the Philosophy of Science **65**, 621 (2014).
[18] Á. Sousa, Correio dos Açores **14**, 21 (2019).
[19] M.S. Rêgo, G.M. Figueiredo, F.W.P. Brito, P.H.M. Barros, N.J.S. Trindade, e cols. Tecnologias Educacionais: Ensino e Aprendizagem em Diferentes Contextos **1**, 261 (2020).
[20] E.P. Santos, *Evolution of the Normal (Gaussian) Distribution For The Random Walk* (2023). Disponível em https://youtu.be/VNohI-c_L1I.